Corps des nombres algébriques

Proposition Soient K et L deux corps (commutatifs) avec $K \hookrightarrow L$. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébrique. On a alors :

(i) $\mathcal{A}$ est un corps

(ii) $\mathcal{A}$ est dénombrable

(iii) si L est algébriquement clos alors $\mathcal{A}$ est algébriquement clos

· Démonstration du (i)

Soient x, y des nombres algébriques sur K.

On a alors :

· $[K(x) : K] < +\infty$ par définition

· $[K(x,y) : K(x)] < +\infty$, en effet y est algébrique sur K donc sur $K(x) \supset K$ et on a $K(x,y) = K(x)(y)$

Par conséquent, par multiplicativité des degrés $[K(x,y) : K] < +\infty$.

OR :

$K(x-y) \subset K(x,y)$ donc $[K(x-y) : K] < +\infty$

$K(xy^{-1}) \subset K(x,y)$ donc $[K(xy^{-1}) : K] < +\infty$

Donc $x - y \in \mathcal{A}$ et $xy^{-1} \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est un sous-corps de L.

· Démonstration du (ii)

Par définition,

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in L \mid \exists P \in K[X],\ P(\alpha) = 0\}$$

Considérons pour $k, n \in \mathbb{N}$,

$$E_{k,n} := \{P = \sum a_k X^k \mid \deg P = k,\ \max |a_j| = n\}$$

On obtient alors :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \{\text{zéro de } E_{k,n}\}$$ dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis

· Démonstration du (iii) :

Supposons que L est algébriquement clos.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathcal{A}[X]$.

Il s'agit en particulier d'un polynôme de $L[X]$ avec L algébriquement clos, il existe donc $z \in L$ tel que $P(z) = 0$. On a alors, par définition, $[K(a_0, \dots, a_n, z) : K(a_0, \dots, a_n)] < +\infty$.

De plus, par définition de $\mathcal{A}$,

$[K(a_0) : K] < +\infty$,

$[K(a_0, a_1) : K(a_0)] < +\infty$

$\vdots$

$[K(a_0, \dots, a_n) : K(a_0, \dots, a_{n-1})] < +\infty$

On obtient ainsi, par multiplicativité des degrés, $[K(a_0, \dots, a_n) : K] < +\infty$.

Par conséquent,

$$[K(a_0, \dots, a_n, z) : K] = [K(a_0, \dots, a_n, z) : K(a_0, \dots, a_n)]\,[K(a_0, \dots, a_n) : K] < +\infty.$$

Or $K[z] \subset K(a_0, \dots, a_n, z)$ donc $K[z] = K(z)$ et $[K(z) : K] < +\infty$.

Ainsi, z est un nombre algébrique sur K. Par conséquent, P admet une racine sur $\mathcal{A}$.

Donc :

$\mathcal{A}$ est algébriquement clos